Universität Koblenz-Landau
FB 4 Informatik

Prof. Dr. Viorica Sofronie-Stokkermans **07.05.2014**
Dipl.-Inform. Markus Bender

1 Übersicht Induktion

1.1 Allgemeines

Unter einem *induktiven* Vorgehen versteht man im allgemeinen, das Schließen, von etwas Speziellem auf etwas Allgemeines, d.h. aus einigen Fällen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen leitet man ab, das diese Eigenschaften immer gelten. Beispielsweise könnte man aus der Tatsache, dass man 5 Autos gesehen hat von denen jedes genau 4 Räder hatte folgern, dass jedes Auto 4 Räder hat.
Induktion ist ein formelles Beweisverfahren um zu zeigen, dass für alle Elemente einer Menge eine bestimmte Behauptung gilt, d.h. sei M eine Menge, $m \in M$ ein beliebiges Element aus M, und $p(x)$ eine Behauptung für x, dann gilt $p(m)$.
Voraussetzung ist, dass auf M eine wohlfundierte Ordnung definiert ist, d.h. eine Ordnungsrelation $\leq$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $m \in M$ keine unendlich absteigenden Ketten $m \geq m_1 \geq m_2 \geq \ldots$ gibt.
Der Grundgedanke der Induktion beruht darauf, die Behauptung für einen, oder mehrere 'Startwerte' (oft minimale Elemente der Menge im Bezug auf die Ordnung) explizit zu zeigen und dann darauf aufzubauen und das Wissen über die Vorgänger (im Bezug auf die Ordnung) zu nutzen, um zu zeigen, dass die Behauptung auch für das nächste Element gilt. Daraus folgt dann, dass die Behauptung für alle Elemente der Menge gilt.

1.2 Begrifflichkeiten

Folgende Begrifflichkeiten sind von Bedeutung für die Induktion:

Induktionsbehauptung (auch *Induktionsannahme*) Die Aussage, die zu beweisen ist. Beispielsweise die Aussage, dass die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gleich $n * \frac{(n+1)}{2}$ ist.

Induktionsbasis (I.B.) (auch *Induktionsanfang*, *Induktionsanker*) Die Grundlage der Induktion. Hier wird die Behauptung für einen oder mehrere Startwerte bewiesen. Bei den natürlichen Zahlen handelt es sich dabei oft um den Beweis für $n = 1$ oder $n = 0$. Im Allgemeinen, kann man davon ausgehen, dass man bei der Induktionsbasis den Wert für $n = l$ beweist, wenn man zeigen will, dass eine Aussage für alle $n \geq l$ gilt. Nicht alle Arten der Induktion haben eine explizite Induktionsbasis. In diesen Fällen ist es Geschmackssache ob man eine Induktionsbasis mit Fallunterscheidungen macht, oder ob man die Startwerte als Fallunterscheidungen im Induktionsschluss aufführt.

Induktionsvoraussetzung (I.V.) Die Voraussetzung, dass die Behauptung für alle Elemente der Menge gilt, die kleiner (im Bezug auf die Ordnung) als das aktuelle Element sind.

Induktionsschluss (I.S.) (auch *Induktionsschritt*) Der Schritt in dem (mit Hilfe der I.V.) gezeigt wird, dass die Behauptung auch für das aktuelle Element gilt. In manchen

Fällen kann es nötig sein für den Induktionsschluss mehrere mögliche Fälle getrennt zu betrachten.

1.3 Induktion über die natürlichen Zahlen

Bei der Induktion über die natürlichen Zahlen will man zeigen, das die Induktionsannahme, für sämtliche natürliche Zahlen (ab einem gewissen Startwert) gilt.
Die Induktion über die natürlichen Zahlen hat eine Induktionsbasis, in der man explizit zeigt, dass die Induktionsannahme für einen bestimmten Anfangswert (oft 0 oder 1, manchmal aber auch andere Werte) gilt.
Im Gegensatz zur Verallgemeinerten vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen, bei der man voraussetzt, dass die Behauptung für alle kleineren Werte gilt, wird bei der natürlichen Induktion vorausgesetzt, dass die Annahme für genau einen einzelnen Wert n gilt und es wird dann gezeigt, dass die Behauptung für den direkten Nachfolger dieser Zahl, $n + 1$, gilt.

Beispiel: Gaußsche Summenformel

Induktionsbehauptung: Die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich $n * \frac{(n+1)}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen:

I.B. Zu zeigen: Die Induktionsbehauptung gilt für $n = 0$.

$$0 = 0 * \frac{(0+1)}{2} = 0$$

Damit ist die Induktionsbasis bewiesen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

I.V. Die Behauptung gilt für n, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n} i = n * \frac{(n+1)}{2}.$$

I.S. Zu zeigen: Die Behauptung gilt für $n + 1$, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (n+1) * \frac{((n+1)+1)}{2}.$$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{\text{nach I.V.}}{=} n * \frac{(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) * \frac{((n+1)+1)}{2}$$

Damit ist gezeigt, dass die Induktionsbehauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1.4 Verallgemeinerte vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen

Mit der verallgemeinerten vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen kann man all das beweisen, das man auch mit der Induktion über die natürlichen Zahlen beweisen kann. Zusätzlich kann man Beweise führen, für die es notwendig ist mehrere Basisfälle zu zeigen.
Im Gegensatz zur Induktion über die natürlichen Zahlen, bei der man voraussetzt, dass die Behauptung für einen einzelnen Wert gilt, wird bei der verallgemeinerten vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen angenommen, dass die Annahme für alle Werte, die kleiner als ein beliebiges n sind gilt und es wird dann gezeigt, dass die Behauptung für dieses n gilt.
Um diese generelleren Fälle zu zeigen, sieht die I.V. und die gesamte Induktion etwas anders aus. Statt

$$(\underbrace{p(0)}_{I.B.} \wedge \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{\underbrace{p(n)}_{I.V.} \to p(n+1))}_{I.S} \to \forall m \in \mathbb{N} : p(m)$$

lautet sie

$$(\underbrace{p(0)}_{I.B} \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{\underbrace{p(0) \wedge p(1) \wedge \ldots \wedge p(n)}_{I.V.} \to p(n+1)))}_{I.S.} \to (\forall m \in \mathbb{N} : p(m))$$

respektive

$$(\forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{(\underbrace{\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \to p(k))}_{I.V.} \to p(n)))}_{I.S.} \to (\forall m \in \mathbb{N} : p(m)).$$

Im letzten Fall taucht die Induktionsbasis nicht explizit auf, sie wird aber auch implizit betrachtet, da sich für $n = 0$ Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N} : (k < 0 \to p(k)) \to & p(0) \text{ gdw.} \\
\forall k \in \mathbb{N} : (\bot \to p(k)) \to & p(0) \text{ gdw.} \\
\top \to & p(0) \text{ gdw.} \\
& p(0)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass man die Behauptung für den/die Startwert(e) auch zeigen muss.

Beispiel: Produkt von Primzahlen

Induktionsbehauptung: Falls $n \geq 2$, gilt, dass sich n als Produkt von Primzahlen schreiben lässt. Dabei kann ein Produkt aus $1, 2, \ldots, l$ Faktoren bestehen.

Beweis durch die verallgemeinerten vollständige Induktion:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

I.V. Die Behauptung gilt für alle k, die kleiner als n sind.

I.S. Zu zeigen: Die Behauptung gilt für n.

Es ist leicht zu sehen, dass 2 Fälle betrachtet werden müssen:

- n **ist eine Primzahl:** Wenn n eine Primzahl ist, folgt trivial, dass sie als Produkt von Primzahlen darstellbar ist. In diesem Fall als n.
- n **ist keine Primzahl:** In dem Fall ist $n = k_1 * k_2$ mit $k_i \in \mathbb{N}$ und $1 < k_i < n$ für $i \in \{1, 2\}$.

  Weil $k_i < n$ für $i \in \{1, 2\}$, gilt nach der I.V., die Behauptung für k_1 und k_2, d.h. k_1 und k_2 sind Produkte von Primzahlen. Da $n = k_1 * k_2$, lässt sich auch n als Produkt von Primzahlen schreiben.

Damit ist gezeigt, dass die Induktionsbehauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

1.5 Wohlfundierte Induktion

Bei der wohlfundierten Induktion handelt es sich um einen generelleren Fall der Verallgemeinerten vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen, das heißt wir sprechen nicht über ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sondern über ein beliebiges $a \in A$ wobei A eine beliebige wohl-geordnete Menge sein kann.
Das Vorgehen bei einer wohlfundierten Induktion entspricht dem Vorgehen bei der verallgemeinerten vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen.

1.6 Strukturelle Induktion

Bei der strukturellen Induktion handelt es sich um einen Sonderfall der wohlfundierten Induktion. Sie wird verwendet um Eigenschaften von induktiv definierten 'Gebilden' zu beweisen.
Ein Beispiel für ein 'Gebilde' sind die aussagenlogischen Formeln, mit der Relation *Teilformel*.

Beispiel: Jede aussagenlogische Formel lässt sich auch nur mit $\wedge$ und $\neg$ darstellen

Beispiel aus der Wikipedia[1]
Die Definition der Menge For_Π der aussagenlogischen Formeln für die Menge Π der Aussagenvariablen:
For_Π is die kleinste Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- $\top, \bot \in \mathsf{For}_\Pi$
- $\Pi \subset \mathsf{For}_\Pi$
- Wenn $F \in \mathsf{For}_\Pi$, dann $\neg F \in \mathsf{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathsf{For}_\Pi$, dann $F \wedge G, F \vee G, F \to G, F \leftrightarrow G \in \mathsf{For}_\Pi$

Induktionsbehauptung: Für jede wohlgeformte aussagenlogische Formel F gibt es eine Formel F', sodass $F \equiv F'$ und F' besteht nur aus Aussagenvariablen, $\top$ und $\bot$ und den beiden Operatoren $\wedge$ und $\neg$.

I.B. Zu zeigen: Die Induktionsbehauptung gilt für F atomar, $\bot$, $\top$.

Wenn F atomar, dann folgt F' atomar.

Für $F = \bot$ und $F = \top$ gilt die Behauptung trivial.

Damit ist die Induktionsbasis bewiesen.

[1] `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Strukturelle_Induktion&oldid=97291192`

Sei F eine Formel, mit $F \notin \Pi \cup \{\bot, \top\}$.

I.V. Die Behauptung gilt für alle G, die echte Teilformeln von F sind.

I.S. Zu zeigen: Die Behauptung gilt für F.

An der Definition von For_Π ist leicht zu sehen, dass 5 Fälle betrachtet werden müssen:

- wenn $F = \neg G$, dann $F' = \neg G$
- wenn $F = G \wedge H$, dann $F' = G \wedge H$
- wenn $F = G \vee H$, dann $F' = \neg(\neg G \wedge \neg H)$
- wenn $F = G \rightarrow H$, dann $F' = \neg(G \wedge \neg H)$
- wenn $F = G \leftrightarrow H$, dann $F' = \neg(\neg G \wedge \neg H) \wedge \neg(G \wedge H)$

Da G, H Teilformeln von F sind, gilt die Induktionsbehauptung für sie und somit dann auch für F.

Es folgt, dass die Behauptung für alle wohlgeformten aussagenlogische Formeln gilt.