Universität Koblenz-Landau
FB 4 Informatik

Prof. Dr. Viorica Sofronie-Stokkermans **28.09.2012**
Dipl.-Inform. Markus Bender

Nachklausur

zur Vorlesung

Logik für Informatiker

im Sommersemester 2012

Lösung

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Hinweise:

- Am Anfang:
  - Legen Sie Ihren Studentenausweis und ein Ausweisdokument mit Lichtbild (Personalausweis, Pass, Führerschein) auf den Tisch.
  - Schalten Sie Ihr Handy aus.
  - Benutzen Sie ein dokumentenechtes Schreibgerät (keinen Bleistift). Es sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt.
  - Kennzeichnen Sie jedes neue Blatt Papier (auch Schmierpapier), das Sie benutzen, zunächst mit Namen und Matrikelnummer.
    Sie können leere Blätter bei der Aufsicht durch ein Handzeichen anfordern.
- Am Ende:
  - Kreuzen Sie jede bearbeitete Aufgabe unten in der Tabelle an.
  - Heften Sie den Klausurtext und alle Ihre Lösungsblätter in der linken oberen Ecke zusammen. (Ein Heftapparat steht bei der Aufsicht zur Verfügung.)
    Zu beachten: Blätter, die versehentlich aus dem Hörsaal genommen wurden, können nicht mehr gewertet werden.

Unterschreiben Sie hier nach dem Zusammenheften, vor der Abgabe: **Viel Erfolg!**

....

Aufgabe	1				2		3		4			5			6		7		8		9		Σ
	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	8a	8b	9a	9b	
bearbeitet?																							
Punkte:	5	2	2	2	10	1	3	9	2	3	3	7	3	2	1	11	11	1	10	1	10	1	100
erreicht:																							

Aufgabe 1 **(5 + 2 + 2 + 2 = 11 Punkte)**

Sei F die folgende aussagenlogische Formel:

$$\big(Q \wedge \neg P\big) \rightarrow \big((P \leftrightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)\big)$$

(1a) Stellen Sie die Wahrheitstabelle für F auf:

P	Q	R	F_0 $Q \wedge \neg P$	F_1 $P \leftrightarrow R$	F_2 $Q \rightarrow R$	F_3 $F_1 \wedge F_2$	F $F_0 \rightarrow F_3$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1

(1b) Kreuzen Sie in der untenstehenden Tabelle an, ob F erfüllbar, unerfüllbar oder allgemeingültig ist. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

	Erfüllbar	Unerfüllbar	Allgemeingültig
ja	☒	☐	☐
nein	☐	☒	☒

Es gibt mindestens eine Belegung, die die Formel wahr macht. Daher ist sie erfülbar und nicht unerfüllbar.

Es gibt mindestens eine Belegung, die die Formel falsch macht. Daher ist sie nicht allgemeingültig.

(1c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrheitstabelle die konjunktive Normalform von F.

$$KNF_F = \neg DNF_{\neg F}$$
$$DNF_{\neg F} = (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$
$$KNF_F = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

(1d) Ist die in (1c) bestimmte konjunktive Normalform von F eine Horn Formel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein.
Eine Horn-Formel ist eine Konjunktion von Horn-Klauseln. Eine Horn-Klausel ist eine Klausel, die maximal ein positives Literal enthält. Dies ist hier nicht gegeben, da $P \vee \neg Q \vee R$ zwei positive Literale enthält.

Aufgabe 2

(10 + 1 = 11 Punkte)

Sei F die folgende aussagenlogische Formel:

$$\Big(P \lor Q\Big) \land \Big(\neg P \lor Q\Big) \land \Big(\neg R \lor \neg S\Big) \land \Big(S\Big) \land \Big(P \lor \neg Q\Big) \land \Big(\neg P \lor \neg Q\Big)$$

(2a) Wenden Sie eines der Davis-Putnam-Verfahren (DP oder eine Version von DPLL) auf F an. Gehen Sie dabei in klaren Schritten vor, wobei ein Schritt genau einer Regelanwendung entspricht, und geben Sie explizit an, welche der Regeln Sie in jedem der Schritte angewendet haben.

$$\begin{aligned}
\{\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &\text{ Unit Prop}\\
\{S\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &\text{ Unit Prop}\\
\{S, \neg R\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &\text{ Decide}\\
\{S, \neg R, P^d\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &\text{ Unit Prop}\\
\{S, \neg R, P^d, Q\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &\text{ Backtrack}\\
\{S, \neg R, \neg P\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &\text{ Unit Prop}\\
\{S, \neg R, \neg P, Q\}||(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg S) \land (S) \land (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor \neg Q) &
\end{aligned}$$

Die Klausel $(P \lor \neg Q)$ ist in dieser Belegung falsch. Da alle Variablen belegt sind und es keine weiteren Möglichkeiten zum Backtracking gibt bricht DPLL an dieser Stelle ab.

(2b) Verwenden Sie das Ergebnis aus (2a) um eine begründete Aussage über die *(Un-)Erfüllbarkeit* von F zu machen.

Da DPLL ein vollständiges Entscheidungsverfahren ist, und keine Belegung erzeugen konnte, die die Formel wahr macht, ist die Formel unerfüllbar.

Aufgabe 3

(3 + 9 = 12 Punkte)

(3a) Geben Sie die allgemeinste Struktur eines Beweises mit struktureller Induktion (für Aussagenlogik) an.

Induktionsbehauptung: Für jede wohlgeformte aussagenlogische Formel F gilt die Aussage $p(F)$.

Induktionsbasis (I.B.) Zu zeigen: $p(F)$ gilt für alle Formeln $F \in \Pi \cup \{\bot, \top\}$.

Sei F eine Formel, mit $F \notin \Pi \cup \{\bot, \top\}$.

Induktionsvoraussetzung (I.V.) $p(G)$ gilt für alle Formeln G, die echte Teilformeln von F sind.

Induktionsschritt (I.S.) Zu zeigen, dass $p(F)$ gilt. Verwendung der I.V. 5 Fälle zu betrachten:

(a) $F = \neg G$

(b) $F = G \vee H$

(c) $F = G \wedge H$

(d) $F = G \rightarrow H$

(e) $F = G \leftrightarrow H$

(3b) Sei Π eine Menge von Aussagenvariablen. Für jede aussagenlogische Formel F mit Aussagenvariablen in Π seien $\mathsf{Tiefe}(F)$ und $\mathsf{Länge}(F)$ wie folgt definiert:

$$\mathsf{Tiefe}(F) = \begin{cases} 0 & \text{falls } F \in \Pi \cup \{\top, \bot\} \\ 1 + \mathsf{Tiefe}(F_1) & \text{falls } F = \neg F_1 \\ 1 + \mathsf{max}(\mathsf{Tiefe}(F_1), \mathsf{Tiefe}(F_2)) & \text{falls } F = F_1 \,\mathsf{op}\, F_2 \\ & \mathsf{op} \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{cases}$$

$$\mathsf{Länge}(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } F \in \Pi \text{ oder } F \in \{\top, \bot\} \\ 1 + \mathsf{Länge}(F_1) & \text{falls } F = \neg F_1 \\ 1 + \mathsf{Länge}(F_1) + \mathsf{Länge}(F_2) & \text{falls } F = F_1 \,\mathsf{op}\, F_2 \\ & \mathsf{op} \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{cases}$$

Beweisen Sie folgende Behauptung durch strukturelle Induktion:

Für jede aussagenlogische Formel F mit Aussagenvariablen in Π gilt:

$$1 + \mathsf{Tiefe}(F) \leq \mathsf{Länge}(F).$$

Induktionsbehauptung: $p(F) : 1 + \mathsf{Tiefe}(F) \leq \mathsf{Länge}(F)$.

I.B. Zu zeigen: Die Behauptung gilt für $F \in \sqcap \cup \{\bot, \top\}$. Die 3 Basisfälle folgen direkt aus der Definition von Tiefe und $\mathsf{Länge}$.

1) $F = \bot$: $1 + \mathsf{Tiefe}(\bot) \leq \mathsf{Länge}(\bot) \equiv 1 + 0 \leq 1 \equiv 1$
2) $F = \top$: $1 + \mathsf{Tiefe}(\top) \leq \mathsf{Länge}(\top) \equiv 1 + 0 \leq 1 \equiv 1$
3) $F = P, P \in \sqcap$: $1 + \mathsf{Tiefe}(P) \leq \mathsf{Länge}(P) \equiv 1 + 0 \leq 1 \equiv 1$

Damit ist die Induktionsbasis bewiesen

Sei F eine Formel, mit $F \notin \sqcap \cup \{\bot, \top\}$.

I.V. Die Behauptung gilt für alle Formeln, die echte Teilformeln von F sind.

I.S. Zu zeigen: Die Behauptung gilt für F.

5 Fälle zu betrachten:

$F = \neg G$:

$$\begin{aligned} & 1 + \mathsf{Tiefe}(\neg G) \leq \mathsf{Länge}(\neg G) \\ \equiv\ & 1 + 1 + \mathsf{Tiefe}(G) \leq 1 + \mathsf{Länge}(G) \\ \overset{I.V}{\Leftarrow}\ & 1 \leq 1 \\ \equiv\ & 1 \end{aligned}$$

$F = G \circ H$ **mit** $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

$$\begin{aligned} & 1 + \mathsf{Tiefe}(G \circ H) \leq \mathsf{Länge}(G \circ H) \\ \equiv\ & 1 + 1 + \mathsf{max}(\mathsf{Tiefe}(G), \mathsf{Tiefe}(H)) \leq 1 + \mathsf{Länge}(G) + \mathsf{Länge}(H) \\ \overset{I.V}{\Leftarrow}\ & 1 \leq 1 \\ \equiv\ & 1 \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass die Aussage für beliebige aussagenlogische Formeln gilt.

Aufgabe 4 **(2 + 3 + 3 = 8 Punkte)**

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, $\Omega = \{f/2,\ g/2\}$, $\Pi = \{\approx/2\}$, X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$.
Sei $\mathcal{A}$ die folgende Σ-Struktur:

$$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, \{f_{\mathcal{A}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_{\mathcal{A}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \{\approx_{\mathcal{A}}\})$$

wobei $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen ist;

für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$,	$f_{\mathcal{A}}(n_1, n_2) = n_1 - n_2 \in \mathbb{R}$	(Subtraktion reeller Zahlen)
für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$,	$g_{\mathcal{A}}(n_1, n_2) = n_1 * n_2 \in \mathbb{R}$	(Multiplikation reeller Zahlen)
für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$,	$n_1 \approx_{\mathcal{A}} n_2$ gdw. $n_1 = n_2$	(Gleichheit reeller Zahlen)

Sei $\beta : X \to \mathbb{R}$ mit $\beta(x) = 4.7,\ \beta(y) = 1.0,\ \beta(z) = 19.7$.

Evaluieren Sie:

(4a) $\mathcal{A}(\beta)(f(g(x, y), g(z, y)))$.

(4b) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x(g(x, x) \approx 3))$.

(4c) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(f(x, y) \approx f(y, x)))$.

Geben Sie dabei sinnvolle Zwischenschritte an.

(4a)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\beta)(f(g(x, y), g(z, y)))\\
=&f_{\mathcal{A}}(g_{\mathcal{A}}(\beta(x), \beta(y)), g_{\mathcal{A}}(\beta(z), \beta(y)))\\
=&f_{\mathcal{A}}(g_{\mathcal{A}}(4.7, 1), g_{\mathcal{A}}(19.7, 1))\\
=&f_{\mathcal{A}}((4.7 * 1), (19.7 * 1))\\
=&((4.7 * 1) - (19.7 * 1))\\
=&-15
\end{aligned}$$

(4b)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\beta)(\exists x(g(x, x) \approx 3))\\
=&max_{r \in \mathbb{R}}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto r])(g(x, x) \approx 3)\}\\
=&max_{r \in \mathbb{R}}\{(g_{\mathcal{A}}(r, r) \approx_{\mathcal{A}} 3)\}\\
=&max_{r \in \mathbb{R}}\{((r * r) = 3)\}\\
=&1, \text{ weil für } r = \sqrt{3} \text{ ist } (r * r) = 3
\end{aligned}$$

(4c)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(f(x, y) \approx f(y, x)))\\
=&min_{r_1 \in \mathbb{R}}\ \ min_{r_2 \in \mathbb{R}}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto r_1, y \mapsto r_2])(f(x, y) \approx f(y, x))\}\\
=&min_{r_1 \in \mathbb{R}}\ \ min_{r_2 \in \mathbb{R}}\{(f_{\mathcal{A}}(r_1, r_2) \approx_{\mathcal{A}} f_{\mathcal{A}}(r_2, r_1))\}\\
=&min_{r_1 \in \mathbb{R}}\ \ min_{r_2 \in \mathbb{R}}\{((r_1 - r_2) = (r_2 - r_1))\}\\
=&0, \text{ weil z.B. für } r_1 = 1, r_2 = 0 \text{ ist } r_1 - r_2 \neq r_2 - r_1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

((4 + 1 + 2) + 3 + (1 + 1) = 12 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, $\Omega = \emptyset$, $\Pi = \{p/2,\ r/3\}$, X eine Menge von Variablen und $u, x, y, z \in X$.
Sei F die folgende prädikatenlogische Formel in der Signatur Σ:

$$\exists u \forall x \Bigg(\Big(\exists y\ \neg\big(\exists z\ r(x,y,z)\big) \Big) \ \rightarrow\ \Big(\big(\exists y\ (\neg r(u,y,x) \vee \neg p(x,y))\big) \rightarrow \big(\exists z\ p(y,z)\big) \Big) \Bigg)$$

Geben Sie zur Formel F jeweils die folgenden Formen an:

(5a) die Negationsnormalform;
die bereinigte Form;
die Pränexform;

(5b) die Skolemform;

(5c) die Skolemform mit Matrix in konjunktiver Normalform;
die Klauselnormalform (in Mengennotation).

$$\exists u \forall x \Bigg(\Big(\exists y\ \neg\big(\exists z\ r(x,y,z)\big) \Big) \ \rightarrow\ \Big(\big(\exists y\ (\neg r(u,y,x) \vee \neg p(x,y))\big) \rightarrow \big(\exists z\ p(y,z)\big) \Big) \Bigg)$$

$$\equiv \exists u \forall x \Bigg(\neg\Big(\exists y\ \neg\big(\exists z\ r(x,y,z)\big) \Big) \ \vee\ \Big(\neg\big(\exists y\ (\neg r(u,y,x) \vee \neg p(x,y))\big) \vee \big(\exists z\ p(y,z)\big) \Big) \Bigg)$$

$$\equiv \exists u \forall x \Bigg(\Big(\forall y\ \big(\exists z\ r(x,y,z)\big) \Big) \ \vee\ \Big(\big(\forall y\ (r(u,y,x) \wedge p(x,y))\big) \vee \big(\exists z\ p(y,z)\big) \Big) \Bigg) \quad (NNF)$$

$$\equiv \exists u \forall x \Bigg(\Big(\forall y\ \big(\exists z\ r(x,y,z)\big) \Big) \ \vee\ \Big(\big(\forall v\ (r(u,v,x) \wedge p(x,v))\big) \vee \big(\exists w\ p(y',w)\big) \Big) \Bigg) \quad (bereinigt)$$

$$\equiv \exists u \forall x \forall y \exists z \forall v \exists w \Big(r(x,y,z) \vee \big(r(u,v,x) \wedge p(x,v)\big) \vee p(y',w) \Big) \quad (PNF)$$

$$\Rightarrow_S \forall x \forall y \forall v \Big(r(x,y,sk_z(x,y)) \vee \big(r(sk_u,v,x) \wedge p(x,v)\big) \vee p(y', sk_w(x,y,v)) \Big) \quad (SNF)$$

$$\equiv \forall x \forall y \forall v \Big(\big(r(x,y,sk_z(x,y)) \vee r(sk_u,v,x) \vee p(y', sk_w(x,y,v))\big) \wedge \big(r(x,y,sk_z(x,y)) \vee p(x,v) \vee p(y', sk_w(x,y,v))\big) \Big) \quad (KNF)$$

$$\equiv \{\{r(x,y,sk_z(x,y)), r(sk_u,v,x), p(c_{y'}, sk_w(x,y,v))\}, \{r(x,y,sk_z(x,y)), p(x,v), p(c_{y'}, sk_w(x,y,v))\}\} \quad (Kl.-Menge)$$

Bemerkung: c_y ist eine neue Konstante, die eingeführt wurde um die freie Variable y' im Prädikat $p(y', sk_w(x,y,v))$ zu ersetzen, da in einer Klauselmenge keine freien Variablen vorkommen dürfen.

Aufgabe 6

(1 + (4 + 6 + 1) = 12 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, eine Signatur, $\Omega = \{f/1,\ h/2\}$, $\Pi = \{p/2,\ q/2\}$, X eine Menge von Variablen und $u, w, x, y, z \in X$.
Sei N die folgende Klauselmenge in der Signatur Σ:

(1) $\{p(h(x, x), f(x))\}$
(2) $\{\neg p(h(y, f(f(x))), y),\ \ \neg q(y, h(f(x), x))\}$
(3) $\{p(h(f(w), f(u)), f(h(u, u)))\}$

(6a) Geben Sie die allgemeine Form der prädikatenlogischen Resolutionsregel (für Klauseln in Mengennotation) an.

(6b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, eine Resolvente aus den folgenden Klauseln zu bilden:

- Klausel (1) und Klausel (2),
- Klausel (2) und Klausel (3).

Begründen Sie kurz Ihre Antwort. Sollte das Bilden einer Resolvente möglich sein, geben Sie diese an.

Bemerkung: Benutzen Sie für die Berechnung der Unifikatoren in (6b) explizit den Unifikationsalgorithmus nach Martelli-Montanari. Notieren Sie dabei die einzelnen Zwischenschritte. Jeder Schritt soll der Anwendung genau einer Regel des Algorithmus' entsprechen. (Die Namen der verwendeten Regeln müssen nicht angegeben werden.) Achten Sie darauf, den Unifikationsalgorithmus so lange anzuwenden, bis keine Regel mehr anwendbar ist.

(6a) Drei Beispiele von korrekten Lösungen für diese Aufgabe:

- Seien $\mathcal{C}_1 = \{L_1, M_1, \dots, M_n\}$ und $\mathcal{C}_2 = \{\neg L_2, N_1, \dots, N_m\}$ prädikatenlogische Klauseln mit disjunkten Variablenmengen. Exisitiert ein allgemeinster Unifikator σ, für L_1 und L_2 so ist die Resolvente, die bei der Resolution von $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ entsteht, $(\{M_1, \dots M_n, N_1, \dots, N_m\})\sigma$.

- Seien $\mathcal{C}_1 = D_1 \cup \{L_1\}, \mathcal{C}_2 = D_2 \cup \{L_2\}$ Klauseln mit disjunkten Variablenmengen, wobei D_1, D_2 Klauseln sind und L_1, L_2 Literale. Falls L_1 und L_2 unifizierbar mit mgu σ sind, ist $(D_1 \cup D_2)\sigma$ eine Resolvente der Klauseln $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

- $$\frac{\{D_1 \cup \{L_1\}\} \qquad \{D_2 \cup \{\neg L_2\}\}}{(D_1 \cup D_2)\sigma}$$
  wobei $\sigma =$ mgu(L_1, L_2) und $\{D_1 \cup \{L_1\}\}, \{D_2 \cup \{L_2\}\}$ haben disjunkte Variablenmengen.

Bewertet wurde die Nennung der folgenden Punkte:

- Es muss einen mgu geben
- Die Variablenmengen der beiden beteiligten Klauseln müssen disjunkt sein
- Aufschreiben der Resolvente

(6b)

- Klausel (1) und Klausel (2),

$$\begin{array}{ll} & \{p(h(x_1,x_1),f(x_1)) \doteq p(h(y_2,f(f(x_2))),y_2)\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{h(x_1,x_1) \doteq h(y_2,f(f(x_2))), \quad f(x_1) \doteq y_2\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{x_1 \doteq y_2, \quad x_1 \doteq f(f(x_2))), \quad f(x_1) \doteq y_2\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{x_1 \doteq y_2, \quad y_2 \doteq f(f(x_2))), \quad f(y_2) \doteq y_2\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{x_1 \doteq y_2, \quad y_2 \doteq f(f(x_2))), \quad y_2 \doteq f(y_2)\} \\ \Rightarrow_{MM} & \bot \text{ weil } y_2 \doteq f(y_2) \text{ nicht unifizierbar ist} \end{array}$$

  Da es keinen mgu gibt, kann keine Resolvente gebildet werden.

- Klausel (2) und Klausel (3).

$$\begin{array}{ll} & \{p(h(y,f(f(x))),y) \doteq p(h(f(w),f(u)),f(h(u,u)))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{h(y,f(f(x))) \doteq h(f(w),f(u)), \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{y \doteq f(w), \quad f(f(x)) \doteq f(u), \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{y \doteq f(w), \quad f(x) \doteq u, \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{f(h(u,u)) \doteq f(w), \quad f(x) \doteq u, \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{h(u,u) \doteq w, \quad f(x) \doteq u, \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{w \doteq h(u,u), \quad f(x) \doteq u, \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{w \doteq h(u,u), \quad u \doteq f(x), \quad y \doteq f(h(u,u))\} \\ \Rightarrow_{MM} & \{w \doteq h(f(x),f(x)), \quad u \doteq f(x), \quad y \doteq f(h(f(x),f(x)))\} \end{array}$$

  Der mgu ist somit $\sigma = [h(f(x),f(x))/w,\ f(x)/u,\ f(h(f(x),f(x)))/y]$.
  Da es einen mgu gibt, ist Resolution möglich und führt zur Resolvente: $\{\neg q(f(h(f(x),f(x))),h(f(x),x))\}$.

Aufgabe 7

(11 + 1 = 12 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, eine Signatur, $\Omega = \{b/0,\ c/0\}$, $\Pi = \{p/2,\ q/2,\ r/3\}$, X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$.
Sei N die folgende Klauselmenge in der Signatur Σ:

(1) $\{p(x, x)\}$
(2) $\{\neg q(x, y)\}$
(3) $\{r(c, x, y),\ \ r(z, x, b)\}$
(4) $\{\neg p(x, y),\ \ q(x, c),\ \ \neg r(c, y, x),\ \ \neg r(c, z, x)\}$

(7a) Verwenden Sie den prädikatenlogischen Resolutionkalkül um zu zeigen, dass N unerfüllbar ist. Geben Sie für jeden Schritt explizit alle Umbenennungen, Unifikatoren, Resolventen bzw. Faktoren an.

(7b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (7a) um eine begründete Aussage über die Unerfüllbarkeit von N zu machen.

(7b) Da wir die leere Klausel herleiten konnten, folgt aus der Korrektheit des Resolutionskalküls, dass die Klauselmenge unerfülbar ist.

(7a) Variablenmengen der Klauseln disjunkt machen. Vermindert Umbenennungen.

$$(1') : \{p(x_1, x_1)\}$$
$$(2') : \{\neg q(x_2, y_2)\}$$
$$(3') : \{r(c, x_3, y_3),\quad r(z_3, x_3, b)\}$$
$$(4') : \{\neg p(x_4, y_4),\quad q(x_4, c),\quad \neg r(c, y_4, x_4),\quad \neg r(c, z_4, x_4)\}$$

$$\frac{(3') :\ \{r(c, x_3, y_3),\quad r(z_3, x_3, b)\}}{(5) :\ \{r(c, x_3, b)\}}$$
faktorisieren mit mgu $= [c/z_3, b/y_3]$

$$(5) : \{r(c, x_3, b)\}$$

$$\frac{(4') :\ \{\neg p(x_4, y_4),\quad q(x_4, c),\quad \neg r(c, y_4, x_4),\quad \neg r(c, z_4, x_4)\}}{(6) :\ \{\neg p(x_4, y_4),\quad q(x_4, c),\quad \neg r(c, y_4, x_4)\}}$$
faktorisieren mit mgu $= [y_4/z_4]$

$$(6) : \{\neg p(x_4, y_4),\quad q(x_4, c),\quad \neg r(c, y_4, x_4)\}$$

$$\frac{(5) :\ \{r(c, x_3, b\} \qquad (6) :\ \{\neg p(x_4, y_4),\quad q(x_4, c),\quad \neg r(c, y_4, x_4)\}}{(7) :\ \{\neg p(b, y_4),\quad q(b, c)\}}$$
mit mgu $= [y_4/x_3, b/x_4]$

$$(7) : \{\neg p(b, y_4),\quad q(b, c)\}$$

$$\frac{(2') :\ \{\neg q(x_2, y_2)\} \qquad (7) :\ \{\neg p(b, y_4),\quad q(b, c)\}}{(8) :\ \{\neg p(b, y_4)\}}$$
mit mgu $= [b/x_2, c/y_2]$

$$(8) : \{\neg p(b, y_4)\}$$

$$\frac{(1') :\ \{p(x_1, x_1)\} \qquad (8) :\ \{\neg p(b, y_4)\}}{(9) :\ \bot}$$
mit mgu $= [b/x_1, b/y_1]$

$$(9) : \bot$$

Aufgabe 8 **(10 + 1 = 11 Punkte)**

Sei F die folgende aussagenlogische Formel:

$$\Big(\big((P \to Q) \land (R \to P)\big) \;\to\; \big((Q \to R) \to (Q \to P)\big) \Big)$$

(8a) Verwenden Sie den aussagenlogischen Tableaukalkül um zu zeigen, dass F allgemeingültig ist. Führen Sie vor der Verwendung des Tableaukalküls *keine* Äquivalenzumformungen durch.

1.	$\neg(((P \to Q) \land (R \to P)) \to ((Q \to R) \to (Q \to P)))$	
2.	$(P \to Q) \land (R \to P)$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg(Q \to R) \to (Q \to P)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$P \to Q$	$[2_1, \alpha]$
5.	$R \to P$	$[2_2, \alpha]$
6.	$Q \to R$	$[3_1, \alpha]$
7.	$\neg(Q \to P)$	$[3_2, \alpha]$
8.	Q	$[7_1, \alpha]$
9.	$\neg P$	$[7_2, \alpha]$

10. $\neg R$ $[5_1, \beta]$
    - 12. $\neg Q$ $[6_1, \beta]$ — $\bot$
    - 13. R $[6_2, \beta]$ — $\bot$

11. P $[5_2, \beta]$ — $\bot$

(8b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (8a) um eine begründete Aussage über die Allgemeingültigkeit von F zu machen. Da der Tableaukalkül ein Widerlegungskalkül ist, dessen Korrektheit bewiesen ist, wissen wir, dass aus dem abgeleiteten, geschlossenen Tableau folgt, dass $\neg F$ unerfüllbar ist. Somit ist F allgemeingültig.

Aufgabe 9 **(10 + 1 = 11 Punkte)**

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, $\Omega = \{f/1\}$, $\Pi = \{p/1,\ q/1\}$, X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$.
Sei F die folgende prädikatenlogische Formel in der Signatur Σ:

$$\Big(\ \exists x\ \forall y \big(p(x,y) \land q(x)\big)\Big)\ \land\ \Big(\neg\big(\exists x\big(p(x, f(x))\big) \land \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$$

(9a) Verwenden Sie den Tableaukalkül mit freien Variablen um zu zeigen, dass F unerfüllbar ist. Führen Sie vor der Verwendung des Tableaukalküls *keine* Äquivalenzumformungen durch.

1. $(\exists x \forall y (p(x,y) \land q(x))) \land (\neg(\exists x (p(x, f(x))) \land \exists x q(x)))$
2. $\exists x \forall y (p(x,y) \land q(x))$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg(\exists x (p(x, f(x))) \land \exists x q(x))$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y (p(sk_x, y) \land q(sk_x))$ $[2_1, \delta]$
5. $p(sk_x, y_1) \land q(sk_x)$ $[4_1, \gamma]$
6. $p(sk_x, y_1)$ $[5_1, \alpha]$
7. $q(sk_x)$ $[5_2, \alpha]$

Linker Ast:

8. $\neg(\exists x (p(x, f(x)))$ $[3_1, \beta]$
10. $\neg p(x_1, f(x_1))$ $[8_1, \gamma]$

$\bot$

Rechter Ast:

9. $\neg \exists x q(x)$ $[3_2, \beta]$
11. $\neg q(x_2)$ $[9_1, \gamma]$

$\bot$

Schluss beider Äste mit gemeinsamen mgu $\sigma = [sk_x/x_1, sk_x/x_2, f(sk_x)/y_1]$.

(9b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (9a) um eine begründete Aussage über die Unerfüllbarkeit von F zu machen. Da der Tableaukalkül ein Widerlegungskalkül ist, dessen Korrektheit bewiesen ist, wissen wir, dass aus dem abgeleiteten, geschlossenen Tableau folgt, dass F unerfüllbar ist.